

# Segmenti paralleli

autore: **prof. Antonio Polo**

Scuola Media Superiore Italiana di Rovigno (Croazia),

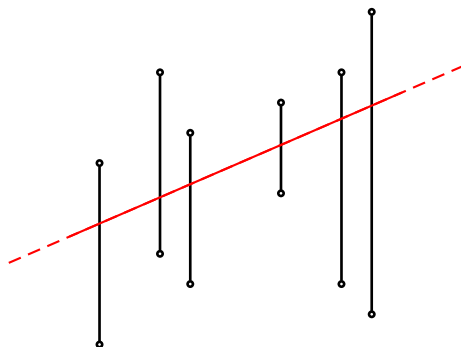
Università “Juraj Dobrila” di Pola (Croazia),

email: [toni.rovigno@gmail.com](mailto:toni.rovigno@gmail.com)

## Riassunto

In questo articolo cercherò di dare alcune risposte ad un problema matematico che il mio amico Patrizio Frederic, ricercatore di statistica presso l’università di Modena, mi ha sottoposto. Dati alcuni segmenti paralleli, vi è almeno una retta che li attraversa tutti? Se vi fossero molte rette che risolvono il problema, ve n’è forse una “migliore” delle altre? Alla prima domanda risponderò esaurientemente, per la seconda mi limiterò a dare alcuni spunti per una futura ricerca.

**Parole chiave.** Segmento, retta, parallelo, baricentro continuo, baricentro discreto, funzione lineare, operatore, punti, piano cartesiano, determinante, coefficiente angolare.



## Un particolare operatore

Cominciamo col definire uno strumento che ci permetta di stabilire quali sono le posizioni reciproche di tre punti  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$  sul piano cartesiano; in particolare ci interessa sapere se i tre punti sono allineati o, in

alternativa, su quale semipiano si trova uno dei tre rispetto alla retta passante per gli altri due. Tale strumento sarà un operatore definito mediante il determinante di una particolare matrice reale di dimensioni  $3 \times 3$ .

Dati tre punti  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  e  $C(x_C, y_C)$  sul piano cartesiano definiamo l'operatore  $\Phi : (\mathbb{R}^2)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  nel seguente modo:

$$\Phi(A, B, C) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo le proprietà di multilinearità del determinante per dimostrare alcune proprietà dell'operatore  $\Phi$ .

**Proposizione 1 (P1).**  *$\Phi$  è invariante per traslazioni.*

**Dimostrazione.** Sia data una traslazione  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di vettore  $\vec{v} = (a, b)$ . Abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B), \mathcal{T}(C)) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A + a & x_B + a & x_C + a \\ y_A + b & y_B + b & y_C + b \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A + b & y_B + b & y_C + b \end{pmatrix} + \overbrace{a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ y_A + b & y_B + b & y_C + b \end{pmatrix}}^{=0} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} + \overbrace{b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=0} = \Phi(A, B, C). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposizione 2 (P2).**  *$\Phi$  è invariante per rotazioni.*

**Dimostrazione.** Sia data una rotazione  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di angolo  $\alpha$ . Abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B), \mathcal{R}(C)) &= \det \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \right] = \\ &= \overbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}}^{=1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} = \Phi(A, B, C) \quad \square \end{aligned}$$

**Proposizione 3 (P3).** *Tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  del piano sono allineati se e solo se  $\Phi(A, B, C) = 0$ .*

**Dimostrazione.** Se due dei tre punti coincidessero la proposizione sarebbe ovvia, possiamo pertanto supporre che i tre punti siano distinti. Per la proposizione P2 non è restrittivo supporre anche che i punti  $A$  e  $B$  siano allineati con l'asse delle ascisse, cioè che  $y_A = y_B$ . Abbiamo che

$$\Phi(A, B, C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_A & y_C \end{pmatrix} = (x_A - x_B)(y_A - y_C);$$

per l'ipotesi che i punti siano distinti si ha che  $x_A \neq x_B$ , quindi  $\Phi(A, B, C) = 0$  se e solo se  $y_A = y_C$ , cioè se e solo se i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono allineati.  $\square$

**Proposizione 4 (P4).** *Dati tre punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  del piano, distinti e non allineati, sia  $\mathcal{C}$  la circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ . Allora  $\Phi(A, B, C) > 0$  se e solo se su  $\mathcal{C}$  i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono ordinati in senso antiorario. Viceversa  $\Phi(A, B, C) < 0$  se e solo se su  $\mathcal{C}$  i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono ordinati in senso orario.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione P1 non è restrittivo supporre che il circocentro del triangolo  $ABC$  coincida con l'origine del piano cartesiano e per la P2 non è restrittivo supporre che i punti  $A$  e  $B$  siano allineati con l'asse delle ordinate, in modo tale che  $x_A = x_B$  e che  $y_A < y_B$ . Sia  $R$  il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ , allora per le suddette ipotesi esistono due angoli  $\alpha \in \langle 0, 180^\circ \rangle$  e  $\gamma \in [0, 360^\circ)$ ,  $\gamma \neq \pm\alpha$ , tali che  $A(R \cos \alpha, -R \sin \alpha)$ ,  $B(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$  e  $C(R \cos \gamma, R \sin \gamma)$  siano le coordinate cartesiane dei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

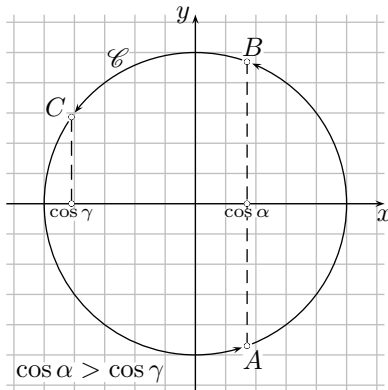


Figura 1.

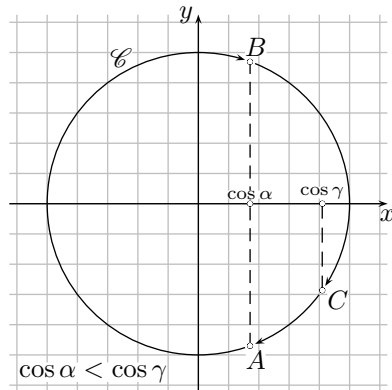


Figura 2.

Nelle figure 1 e 2 è evidenziato il fatto che se i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono ordinati in senso antiorario, allora  $\cos \alpha > \cos \gamma$ , mentre se i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono ordinati in senso orario, allora  $\cos \alpha < \cos \gamma$ . Ma calcolando  $\Phi(A, B, C)$  abbiamo che

$$\Phi(A, B, C) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R \cos \alpha & R \cos \alpha & R \cos \gamma \\ -R \sin \alpha & R \sin \alpha & R \sin \gamma \end{pmatrix} = 2R^2 \sin \alpha (\cos \alpha - \cos \gamma)$$

e siccome  $2R^2 \sin \alpha > 0$ , si deduce la tesi:

$$\begin{aligned} \Phi(A, B, C) > 0 &\Leftrightarrow \cos \alpha > \cos \gamma \Leftrightarrow \text{l'orientamento è antiorario,} \\ \Phi(A, B, C) < 0 &\Leftrightarrow \cos \alpha < \cos \gamma \Leftrightarrow \text{l'orientamento è orario.} \quad \square \end{aligned}$$

E per concludere questo paragrafo, sempre riguardo all'operatore  $\Phi$ , facciamo un'ultima osservazione che ci tornerà utile nel seguito.

**Proposizione 5 (P5).** *Sono dati quattro punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  nel piano, posizionati in modo tale che  $x_B < x_C$  e  $x_A = x_D$ . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- i)  $y_A \geq y_D$ ,
- ii)  $\Phi(A, B, C) \geq \Phi(D, B, C)$ ,
- iii)  $\Phi(B, A, C) \leq \Phi(B, D, C)$ ,
- iv)  $\Phi(B, C, A) \geq \Phi(B, C, D)$ .

*Inoltre in tutti e quattro i casi l'uguaglianza vale se e solo se  $A \equiv D$ .*

**Dimostrazione.** (i  $\Leftrightarrow$  ii) Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \Phi(A, B, C) - \Phi(D, B, C) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_A & y_C \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_D & y_A & y_C \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_B & x_C \\ y_A - y_D & y_A & y_C \end{pmatrix} = (y_A - y_D)(x_C - x_B); \end{aligned}$$

per ipotesi  $x_C - x_B > 0$ , quindi  $\Phi(A, B, C) \geq \Phi(D, B, C) \Leftrightarrow y_A \geq y_D$ , ed inoltre  $\Phi(A, B, C) = \Phi(D, B, C) \Leftrightarrow y_A = y_D \Leftrightarrow A \equiv D$ .

(ii  $\Leftrightarrow$  iii  $\Leftrightarrow$  iv) Il determinante, oltre che multilineare, è un operatore alternante, ovvero cambia di segno per ogni trasposizione di riga o di colonna, quindi questa equivalenza è ovvia.  $\square$

## Lo spazio delle funzioni lineari

Un altro strumento che utilizzeremo è lo spazio delle funzioni lineari, che chiameremo  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ : è una sorta di spazio duale di  $\mathbb{R}^2$ , isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , nel quale non troviamo rappresentati i funzionali lineari (cioè le applicazioni lineari del tipo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y) = ax + by$  per qualche  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ), bensì troviamo rappresentate le funzioni lineari reali, cioè le funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f(x) = kx + l$  per qualche  $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ .

Le funzioni lineari di  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  sono in corrispondenza biunivoca con le rette sul piano cartesiano non parallele all'asse delle ordinate, queste sono in corrispondenza biunivoca con le equazioni del tipo  $y = kx + l$  e quindi, tramite la coppia  $(k, l)$  sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di  $\mathbb{R}^2$ ; questa corrispondenza ha delle proprietà interessanti evidenziate nella prossima proposizione.

**Proposizione 6.** *Sia  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  lo spazio delle funzioni lineari di  $\mathbb{R}^2$ . In  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  valgono le seguenti proprietà:*

**(L1)** *l'insieme dei fasci di rette sul piano cartesiano è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle rette su  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  e, in particolare, una retta su  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  è parallela alle ordinate se e solo se il fascio a cui è associata è improprio;*

**(L2)** *l'insieme delle rette passanti per i punti di un segmento parallelo all'asse delle ordinate è convesso in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  e, in particolare, esso è formato dai punti del piano compresi tra due rette parallele.*

**(L3)** *l'insieme delle rette passanti per i punti di due segmenti paralleli all'asse delle ordinate, ma con ascisse distinte, è limitato e convesso in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  e, in particolare, esso è un parallelogramma il cui baricentro è associato alla retta passante per i punti medi dei due segmenti.*

**Dimostrazione.** **(L1)** Sia dato un generico punto  $P(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ , allora il fascio proprio di rette passante per  $P$  ha equazione esplicita  $y = k(x - x_P) + y_P$ ; al variare di  $k \in \mathbb{R}$  questo fascio è rappresentato in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dal luogo geometrico dei punti le cui coordinate sono  $(k, -x_P k + y_P)$ . Questo luogo geometrico è una retta la cui equazione è  $y = -x_P x + y_P$ , quindi non parallela alle ordinate. Se invece avessimo un fascio proprio di rette in  $\mathbb{R}^2$ , la sua equazione esplicita sarebbe del tipo  $y = cx + l$ , con  $l$  parametro e  $c$  costante; al variare di  $l \in \mathbb{R}$  questo fascio è rappresentato in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dal luogo geometrico dei punti le cui coordinate sono  $(c, l)$  e questo luogo geometrico è una retta, parallela all'asse delle ordinate, di equazione  $x = c$ .

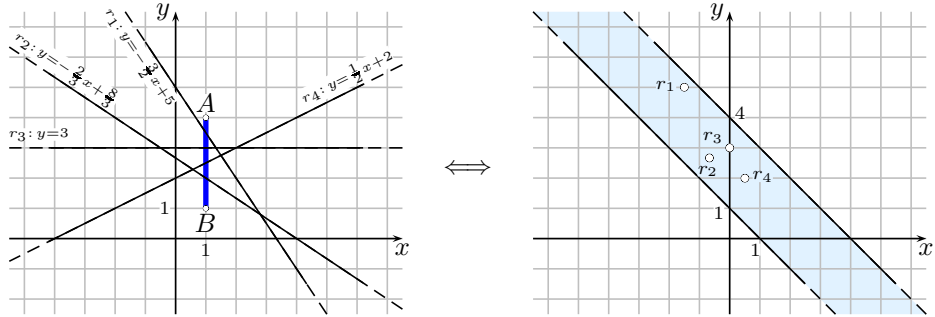


Figura 3.

**(L2)** Sia  $\overline{AB}$  un segmento parallelo all'asse delle ordinate di estremi  $A(a, b)$  e  $B(a, c)$  (figura 3); un generico punto  $P_t$  di questo segmento ha coordinate del tipo  $P_t(a, b + t(c - b))$  per qualche  $t \in [0, 1]$ . Per quanto visto in (L1), il fascio proprio di rette passante per  $P_t$  è rappresentato in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dalle rette di equazione  $y = -ax + b + t(c - b)$ ; al variare di  $t \in [0, 1]$  tali rette rappresentano l'insieme di tutte le rette parallele comprese fra le rette  $y = -ax + b$  e  $y = -ax + c$  e formano un insieme convesso in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

**(L3)** Per quanto visto in (L2) è evidente che l'insieme in questione è un parallelogramma. Per quanto riguarda la seconda parte della tesi, siano  $A(a, b)$ ,  $B(a, c)$ ,  $C(d, e)$  e  $D(d, f)$  i vertici dei due segmenti e siano  $E(a, \frac{b+c}{2})$  e  $F(d, \frac{e+f}{2})$  i punti medi di essi; l'equazione della retta  $EF$  sarà

$$y = \frac{b + c - e - f}{2(a - d)}(x - d) + \frac{e + f}{2} = \frac{b + c - e - f}{2(a - d)}x + \frac{ae + af - bd - cd}{2(a - d)}.$$

Le equazioni delle rette  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  e  $BD$  sono:

$$\begin{aligned} AC : y &= \frac{b - e}{a - d}x + \frac{ae - bd}{a - d}, & AD : y &= \frac{b - f}{a - d}x + \frac{af - bd}{a - d}, \\ BC : y &= \frac{c - e}{a - d}x + \frac{ae - cd}{a - d} \quad \text{e} & BD : y &= \frac{c - f}{a - d}x + \frac{af - cd}{a - d}. \end{aligned}$$

Queste quattro rette, in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , rappresentano i vertici del parallelogramma corrispondente a tutte le rette passanti per  $AB$  e  $CD$ ; il baricentro di tale parallelogramma è il punto medio di una sua diagonale, ovvero il punto

$$P\left(\frac{\frac{b-e}{a-d} + \frac{c-f}{a-d}}{2}, \frac{\frac{ae-bd}{a-d} + \frac{af-cd}{a-d}}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{b - e + c - f}{2(a - d)}, \frac{ae - bd + af - cd}{2(a - d)}\right)$$

le cui coordinate corrispondono effettivamente ai coefficienti della retta  $EF$ .  $\square$

## Il problema

Il problema che vogliamo risolvere è il seguente: dato un certo numero finito  $n \geq 2$  di segmenti chiusi, paralleli, ma a due a due non allineati, si tratta di trovare delle condizioni necessarie e sufficienti affinché vi sia almeno una retta che li attraversi tutti.

**Notazioni** (figura 4).

- Poniamo i segmenti su un piano cartesiano (figura 4), in modo tale che risultino essere paralleli all'asse delle ordinate, e chiamiamoli  $L_1, L_2, \dots, L_n$  ordinandoli crescentemente secondo le ascisse.
- Siano  $A_i(x_i, a_i)$  e  $B_i(x_i, b_i)$  gli estremi dell' $i$ -esimo segmento, con  $a_i \leq b_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .
- Fra tutte le rette passanti per i vertici dei segmenti ne fissiamo due particolari: la retta  $A_s B_t$  il cui coefficiente angolare  $k_{st}$  è il minimo tra i coefficienti angolari di tutte le rette del tipo  $A_i B_j$  con  $1 \leq i < j \leq n$  e la retta  $B_u A_v$  il cui coefficiente angolare  $k'_{uv}$  è il massimo tra i coefficienti angolari di tutte le rette del tipo  $B_i A_j$  con  $1 \leq i < j \leq n$ .

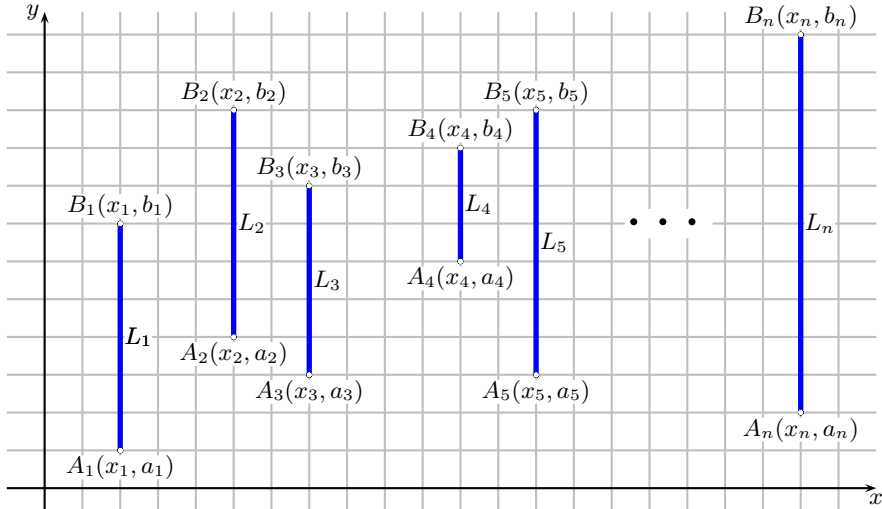


Figura 4.

**Teorema (TT).** *Con le notazioni precedenti e considerando il caso non banale  $n \geq 3$ , abbiamo che i seguenti fatti sono equivalenti:*

- i) esiste almeno una retta che interseca tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ;
- ii)  $\Phi(A_i, B_j, A_k) \leq 0 \leq \Phi(B_i, A_j, B_k)$  per ogni  $i, j, k$  tali che  $1 \leq i < j < k \leq n$ ;
- iii) la retta  $A_s B_t$  interseca tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ;
- iv) la retta  $B_u A_v$  interseca tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .

**Dimostrazione.** (i  $\Rightarrow$  ii) Fissiamo tre segmenti  $L_i, L_j$  e  $L_k$ , con  $1 \leq i < j < k \leq n$ ; per ipotesi esiste una retta che li attraversa, quindi possiamo supporre che esistano tre punti allineati  $P_i(x_i, y_i) \in L_i, P_j(x_j, y_j) \in L_j$  e  $P_k(x_k, y_k) \in L_k$  tali che  $a_p \leq y_p \leq b_p$  per ogni  $p \in \{i, j, k\}$ . Per la P3 sappiamo che  $\Phi(P_i, P_j, P_k) = 0$  e per la P5 abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi(A_i, B_j, A_k) &\leq \Phi(P_i, B_j, A_k) \leq \Phi(P_i, P_j, A_k) \leq \overbrace{\Phi(P_i, P_j, P_k)}^{=0} \leq \\ &\leq \Phi(B_i, P_j, P_k) \leq \Phi(B_i, A_j, P_k) \leq \Phi(B_i, A_j, P_k), \end{aligned}$$

quindi questa prima implicazione è dimostrata.

(ii  $\Rightarrow$  iii) Per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sia  $P_i(x_i, y_i)$  il punto di intersezione tra la retta  $A_s B_t$  e la retta  $x = x_i$ . Ci sono quattro casi da analizzare.

1° caso:  $1 \leq i < s$ . Per ipotesi  $\Phi(B_i, A_s, B_t) \geq 0$  e per la P3  $\Phi(P_i, A_s, B_t) = 0$ , quindi per la P5 abbiamo che  $b_i \geq y_i$ .

2° caso:  $1 \leq i < t$ . Sappiamo che  $k_{st} \leq k_{it}$  e che il punto  $P_i$  appartiene alla retta  $A_s B_t$ , quindi abbiamo che

$$k_{st} \leq k_{it} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_i - b_t}{x_i - x_t} \leq \frac{a_i - b_t}{x_i - x_t} \quad \Leftrightarrow \quad y_i - b_t \geq a_i - b_t \quad \Leftrightarrow \quad y_i \geq a_i.$$

3° caso:  $s < i \leq n$ . Sappiamo che  $k_{st} \leq k_{si}$  e che il punto  $P_i$  appartiene alla retta  $A_s B_t$ , quindi abbiamo che

$$k_{st} \leq k_{si} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_s - y_i}{x_s - x_i} \leq \frac{a_s - b_i}{x_s - x_i} \quad \Leftrightarrow \quad a_s - y_i \geq a_s - b_i \quad \Leftrightarrow \quad y_i \leq b_i.$$

4° caso:  $t < i \leq n$ . Per ipotesi  $\Phi(A_s, B_t, A_i) \leq 0$  e per la P3  $\Phi(A_s, B_t, P_i) = 0$ , quindi per la P5 abbiamo che  $a_i \leq y_i$ .

Aggiungendo anche le due disuguaglianze banali  $b_s \geq y_s = a_s$  e  $a_t \leq y_t = b_t$ , nei quattro casi sono dimostrate tutte le disuguaglianze del tipo  $a_i \leq y_i \leq b_i$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , quindi la retta  $A_s B_t$  interseca tutti gli  $n$  segmenti.

(ii  $\Rightarrow$  iv) Dimostrazione del tutto analoga alla precedente.

(iii  $\Rightarrow$  i), (iv  $\Rightarrow$  i). Queste implicazioni sono ovvie. □



**Corollario 1.** *I seguenti fatti sono equivalenti:*

- i) *esiste un'unica retta che interseca tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ;*
- ii) *le rette  $A_s B_t$  e  $B_u A_v$  coincidono e intersecano i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ;*
- iii)  $\Phi(A_i, B_j, A_k) \leq 0 \leq \Phi(B_i, A_j, B_k)$  per ogni  $i, j, k$  tali che  $1 \leq i < j < k \leq n$  e, se non siamo in presenza del caso limite in cui due dei segmenti degenerano in un punto, allora almeno in un caso si ha l'uguaglianza

$$\Phi(A_i, B_j, A_k) = 0 \quad \text{oppure} \quad \Phi(B_i, A_j, B_k) = 0.$$

**Dimostrazione.** (i  $\Rightarrow$  ii) Ovvio, per l'equivalenza i  $\Leftrightarrow$  iii  $\Leftrightarrow$  iv di TT.

(ii  $\Rightarrow$  iii) TT ci assicura che  $\Phi(A_i, B_j, A_k) \leq 0 \leq \Phi(B_i, A_j, B_k)$  per ogni  $i, j, k$  tali che  $1 \leq i < j < k \leq n$ . I quattro punti  $A_s, B_t, B_u$  e  $A_v$  sono, per ipotesi, allineati; supponendo che non vi siano due segmenti che degenerano in un punto, allora non può contemporaneamente accadere che  $A_s \equiv B_u$  e  $B_t \equiv A_v$ , quindi siamo certi che, oltre alle disuguaglianze già note  $x_s < x_t$  e  $x_u < x_v$ , si verifica anche almeno una fra queste:

$$x_s < x_u, \quad x_u < x_s, \quad x_t < x_v, \quad x_v < x_t.$$

In ciascuno dei quattro casi abbiamo che

$$\begin{aligned} x_s < x_u &\vee x_u < x_v &\Rightarrow &\Phi(A_s, B_u, A_v) = 0, \\ x_u < x_s &\vee x_s < x_t &\Rightarrow &\Phi(B_u, A_s, B_t) = 0, \\ x_t < x_v &\vee x_s < x_t &\Rightarrow &\Phi(A_s, B_t, A_v) = 0, \\ x_v < x_t &\vee x_u < x_v &\Rightarrow &\Phi(B_u, A_v, B_t) = 0, \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione.

(iii  $\Rightarrow$  i) TT ci assicura che almeno una retta esiste; l'unicità sarebbe ovvia se due dei segmenti fossero puntiformi, quindi supponiamo che  $\Phi(A_i, B_j, A_k) = 0$  per qualche  $i, j, k$  tali che  $1 \leq i < j < k \leq n$  (la dimostrazione è analoga se supponiamo che  $\Phi(B_i, A_j, B_k) = 0$ ). Una retta che attraversa i segmenti  $L_i, L_j$  e  $L_k$  passerà per i tre punti allineati  $P_i \in L_i, P_j \in L_j$  e  $P_k \in L_k$ , quindi per la P5 avremo che

$$0 = \Phi(A_i, B_j, A_k) \leq \Phi(P_i, B_j, A_k) \leq \Phi(P_i, P_j, A_k) \leq \Phi(P_i, P_j, P_k) = 0.$$

Poiché tutte le disuguaglianze risultano essere delle uguaglianze allora, sempre per la P5, abbiamo che  $P_i \equiv A_i, P_j \equiv B_j$  e  $P_k \equiv A_k$  e la retta non può che essere unica.  $\square$

**Corollario 2.** *Tra tutte le rette che attraversano i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$  (supponendo che ce ne siano) le rette  $A_s B_t$  e  $B_u A_v$  sono quelle con coefficiente angolare rispettivamente massimo e minimo.*

**Dimostrazione.** Consideriamo una retta  $r: y = kx + l$  di coefficiente angolare  $k > k_{st}$ , passante per i punti  $P_s(x_s, y_s) \in L_s$  e  $P_t(x_t, y_t) \in L_t$  e dimostriamo che  $P_t \notin L_t$ . Calcoliamo:

$$\begin{aligned} k_{st} < k &\Rightarrow \frac{a_s - b_t}{x_s - x_t} < \frac{y_s - y_t}{x_s - x_t} \Rightarrow \\ \Rightarrow a_s - b_t > y_s - y_t &\Rightarrow y_t - b_t > y_s - a_s \geq 0. \end{aligned}$$

Siccome  $y_t > b_t$  allora la retta  $r$  non attraversa il segmento  $L_t$  e  $k_{st}$  è quindi il coefficiente angolare massimo fra quelli delle rette che attraversano tutti i segmenti. Analogamente  $k'_{uv}$  sarà il minimo dei coefficienti angolari.  $\square$

## La retta speciale

A questo punto siamo in grado di suggerire un paio di algoritmi che ci permettono di trovare una retta che, fra le tante, possa attraversare nel “migliore” dei modi tutti i segmenti.

**Algoritmo 1.** Una retta speciale... ma non troppo.

1. Dati gli  $n$  segmenti, troviamo la retta  $r = A_s B_t$ .
2. Verifichiamo che sia  $\Phi(B_i, A_s, B_t) \geq 0$  per ogni  $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ .
3. Verifichiamo che sia  $\Phi(A_s, B_t, A_j) \leq 0$  per ogni  $j \in \{t+1, t+2, \dots, n\}$ .
4. Se le verifiche ai punti 2 e 3 hanno avuto esito negativo non vi è motivo di proseguire, altrimenti cerchiamo anche la retta  $p = B_u A_v$ . Per TT le rette  $r$  e  $p$  passano per tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .
5. Prendiamo la retta  $s_1$  che, in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , corrisponde al punto medio fra  $r$  e  $p$ . Per L2 l'insieme delle rette passanti per tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$  è convesso, quindi anche  $s$  passa per tali segmenti.

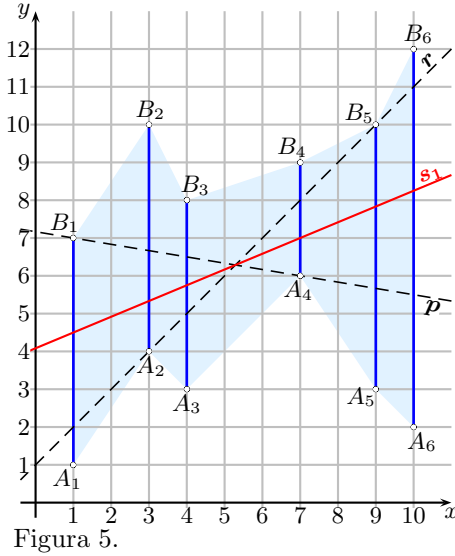


Figura 5.

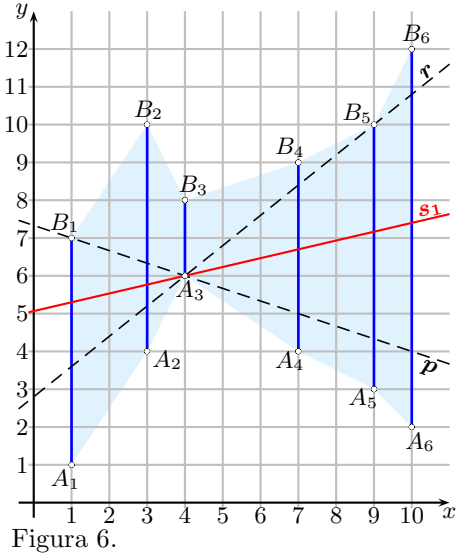


Figura 6.

In figura 5 abbiamo che

$$r: y = x + 1 \quad \wedge \quad p: y = -\frac{1}{6}x + \frac{43}{6} \quad \Rightarrow \quad s_1: y = \frac{5}{12}x + \frac{49}{12};$$

in figura 6 abbiamo che

$$r: y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5} \quad \wedge \quad p: y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \quad \Rightarrow \quad s_1: y = \frac{7}{30}x + \frac{76}{15}.$$

Ma questo metodo non sempre ci dà una “buona” retta; come è evidenziato nella figura 6, a volte la retta  $s_1$  che si ottiene non sembrerebbe essere una delle migliori, in quanto è una retta che passa per uno dei vertici.

**Algoritmo 2.** Una retta un po' più speciale.

1. Eseguiamo i punti 1, 2, 3 e 4 dell'algoritmo 1.
2. Tra tutte le rette  $A_iA_j$ , distinte da  $r$  e da  $p$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , prendiamo solo quelle che attraversano tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .
3. Tra tutte le rette  $B_iB_j$ , distinte da  $r$  e da  $p$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , prendiamo solo quelle che attraversano tutti i segmenti  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .

4. Per L2 l'insieme delle rette trovate ai punti 5 e 6, assieme alle rette  $r$  e  $p$ , in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  sono i vertici di un poligono convesso. Prendiamo come retta  $s_2$  quella corrispondente al baricentro discreto di tale poligono.

Rivediamo l'esempio della figura 5.

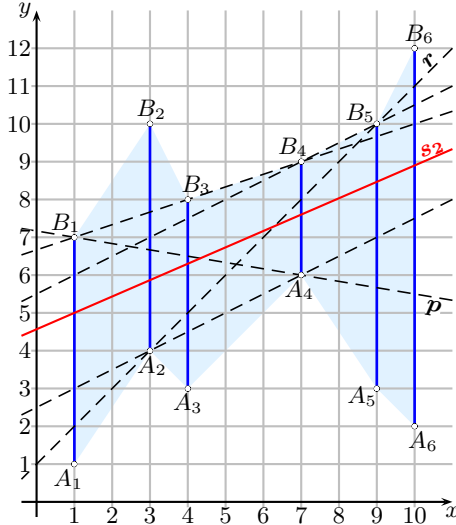


Figura 7.

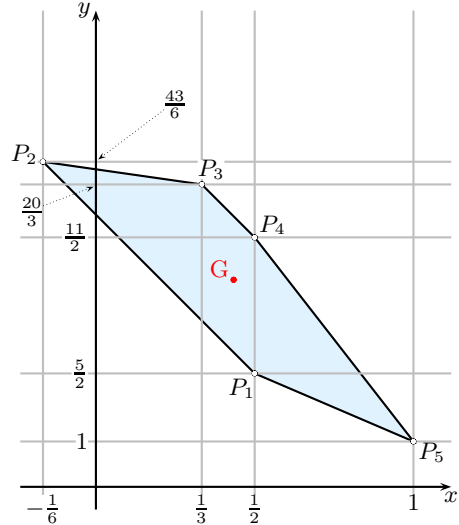


Figura 8.

In figura 7 abbiamo rappresentato i segmenti e in figura 8 abbiamo rappresentato in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  il poligono convesso formato delle rette che attraversano tutti i segmenti; il punto  $G$  è il baricentro discreto del poligono a cui è associata la retta  $s_2$  che sembrerebbe attraversare i segmenti in modo migliore rispetto alla retta  $s_1$  della figura 5. Riassumendo abbiamo che:

$$A_4B_1: y = -\frac{1}{6}x + \frac{43}{6} \Rightarrow P_2 \left( -\frac{1}{6}, \frac{43}{6} \right), \quad A_2A_4: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \Rightarrow P_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right),$$

$$B_1B_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{20}{3} \Rightarrow P_3 \left( \frac{1}{3}, \frac{20}{3} \right), \quad B_5A_2: y = x + 1 \Rightarrow P_5 (1, 1),$$

$$B_4B_5: y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \Rightarrow P_4 \left( \frac{1}{2}, \frac{11}{2} \right);$$

$$x_G = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{5} = \frac{13}{30}, \quad y_G = \frac{\frac{43}{6} + \frac{20}{3} + \frac{11}{2} + \frac{5}{2} + 1}{5} = \frac{137}{30}$$

$$\text{ed infine } s_2: y = \frac{13}{30}x + \frac{137}{30}.$$

Rivediamo anche l'esempio della figura 6.

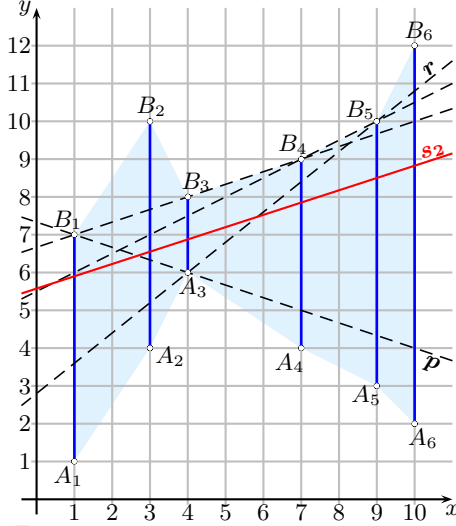


Figura 9.

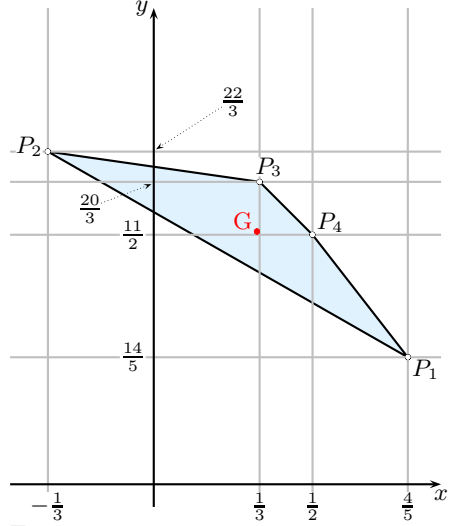


Figura 10.

Anche in questo caso la retta  $s_2$  attraversa in maniera decisamente “migliore” tutti i segmenti, rispetto alla retta  $s_1$  della figura 6. Riassumendo in questo caso abbiamo che:

$$B_5A_3: y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5} \Rightarrow P_1\left(\frac{4}{5}, \frac{14}{5}\right), A_3B_1: y = -\frac{1}{3}x + \frac{22}{3} \Rightarrow P_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{22}{3}\right),$$

$$B_1B_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{20}{3} \Rightarrow P_3\left(\frac{1}{3}, \frac{20}{3}\right), B_4B_5: y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \Rightarrow P_4\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right);$$

$$x_G = \frac{\frac{4}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{4} = \frac{13}{40}, \quad y_G = \frac{\frac{14}{5} + \frac{22}{3} + \frac{20}{3} + \frac{11}{2}}{4} = \frac{223}{40}$$

ed infine  $s_2: y = \frac{13}{40}x + \frac{223}{40}$ .

**Algoritmo 3.** Una retta ancora più speciale.

1. Eseguiamo i punti 1, 2 e 3 dell'algoritmo 2.
2. Fatte le stesse osservazioni del punto 4 dell'algoritmo 2, come retta  $s_3$  prendiamo il baricentro continuo del poligono che troviamo in  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

Rivediamo nuovamente i due esempi precedenti.

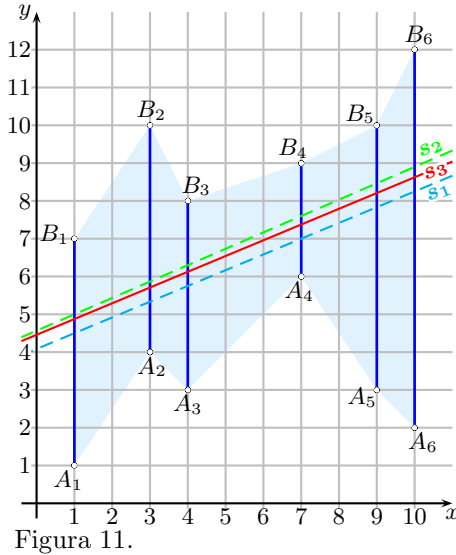


Figura 11.

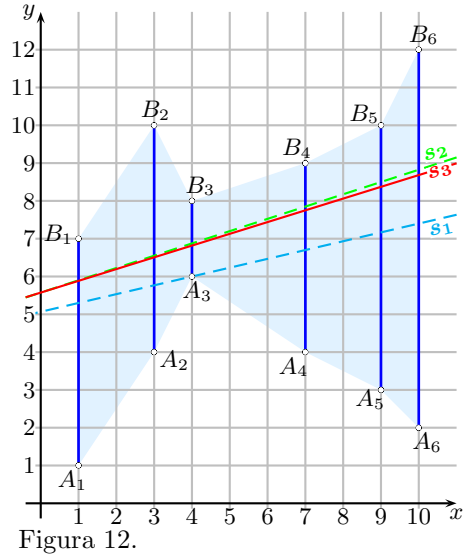


Figura 12.

Osserviamo il poligono in figura 8:

- per L1 le equazioni delle rette  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_4P_5$  e  $P_5P_1$  sono:

$$\begin{aligned} P_1P_2: y &= -7x + 6, & P_2P_3: y &= -x + 7, & P_3P_4: y &= -7x + 9, \\ P_4P_5: y &= -9x + 10, & P_5P_1: y &= -3x + 4; \end{aligned}$$

- la superficie del poligono misura:

$$\begin{aligned} A &= \int_S dS = \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \int_{-7x+6}^{-x+7} dy dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-7x+6}^{-7x+9} dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-3x+4}^{-9x+10} dy dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} [y]_{-7x+6}^{-x+7} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [y]_{-7x+6}^{-7x+9} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [y]_{-3x+4}^{-9x+10} dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} (6x+1) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (6-6x) dx = \\ &= [3x^2 + x]_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} + [3x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + [6x - 3x^2]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \mathbf{2}; \end{aligned}$$

- il baricentro continuo  $M(x_M, y_M)$  lo troveremo calcolando:

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{1}{A} \int_S x dS = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \int_{-7x+6}^{-x+7} x dy dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-7x+6}^{-7x+9} x dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-3x+4}^{-9x+10} x dy dx \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} x[y]_{-7x+6}^{-x+7} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x[y]_{-7x+6}^{-7x+9} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x[y]_{-3x+4}^{-9x+10} dx \right) = \\
&= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \left( 3x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (3x - 3x^2) dx = \\
&= \left[ x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} + \left[ \frac{3}{4}x^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{3}{2}x^2 - x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{16} + \frac{5}{48} + \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_M &= \frac{1}{A} \int_S y dS = \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \int_{-7x+6}^{-x+7} y dy dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-7x+6}^{-7x+9} y dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{-3x+4}^{-9x+10} y dy dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left( \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} [y^2]_{-7x+6}^{-x+7} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [y^2]_{-7x+6}^{-7x+9} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [y^2]_{-3x+4}^{-9x+10} dx \right) = \\
&= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \left( \frac{13}{4} + \frac{35}{2}x - 12x^2 \right) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{45}{4} - \frac{21}{2}x \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (21 - 39x + 18x^2) dx = \\
&= \left[ \frac{13}{4}x + \frac{35}{4}x^2 - 4x^3 \right]_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} + \left[ \frac{45}{4}x - \frac{21}{4}x^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + \left[ 21x - \frac{39}{2}x^2 + 6x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \\
&= \frac{35}{16} + \frac{55}{48} + \frac{9}{8} = \frac{\mathbf{107}}{\mathbf{24}};
\end{aligned}$$

- al baricentro continuo corrisponde la retta  $s_3: y = \frac{5}{12}x + \frac{107}{24}$  (figura 11).

Osserviamo ora il poligono in figura 10:

- per L1 le equazioni delle rette  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$ ,  $P_3P_4$  e  $P_4P_5$  sono:

$$\begin{aligned}
P_1P_2: y &= -4x + 6, & P_2P_3: y &= -x + 7, \\
P_3P_4: y &= -7x + 9, & P_4P_1: y &= -9x + 10;
\end{aligned}$$

- la superficie del poligono misura:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_S dS = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-4x+6}^{-x+7} dydx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-4x+6}^{-7x+9} dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \int_{-4x+6}^{-9x+10} dydx = \\
 &= \dots = \frac{2}{3} + \frac{7}{24} + \frac{9}{40} = \frac{71}{60};
 \end{aligned}$$

- il baricentro continuo  $M(x_M, y_M)$  lo troveremo calcolando:

$$\begin{aligned}
 x_M &= \frac{1}{A} \int_S x dS = \\
 &= \frac{60}{71} \left( \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-4x+6}^{-x+7} x dydx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-4x+6}^{-7x+9} x dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \int_{-4x+6}^{-9x+10} x dydx \right) = \\
 &= \dots = \frac{60}{71} \left( \frac{2}{27} + \frac{13}{108} + \frac{27}{200} \right) = \frac{39731}{127800},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_M &= \frac{1}{A} \int_S y dS = \\
 &= \frac{60}{71} \left( \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \int_{-4x+6}^{-x+7} y dydx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{-4x+6}^{-7x+9} y dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \int_{-4x+6}^{-9x+10} y dydx \right) = \\
 &= \dots = \frac{60}{71} \left( \frac{112}{27} + \frac{659}{432} + \frac{369}{400} \right) = \frac{11873}{2130}
 \end{aligned}$$

- al baricentro continuo corrisponde la retta  $s_3 : y = \frac{39731}{127800}x + \frac{11873}{2130}$  (figura 12).

Nei due esempi sembrerebbe di capire che la retta che troviamo con l'algoritmo 1 sia poco valida, mentre il baricentro discreto e quello continuo ci danno delle rette non molto dissimili tra loro. Se questo fosse sempre vero, allora si potrebbe considerare più opportuno utilizzare l'algoritmo 2, se non altro per evitare la enorme mole di calcoli che si devono fare per trovare la retta con l'algoritmo 3. Ma questo risultato è casuale, dovuto a quei pochi esempi visti, ed il prossimo esempio ne è la conferma. Propongo tale esempio in conclusione dell'articolo e senza calcoli.



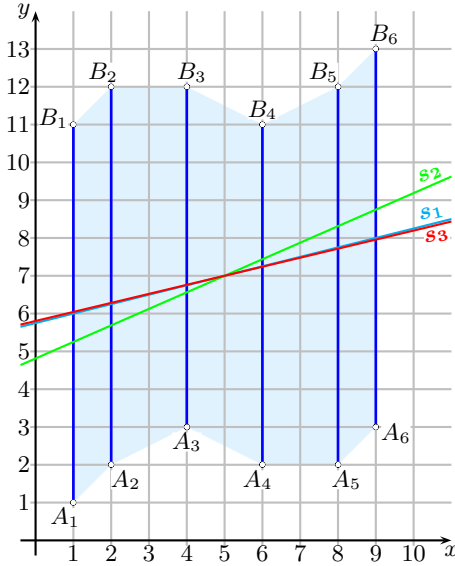


Figura 13.

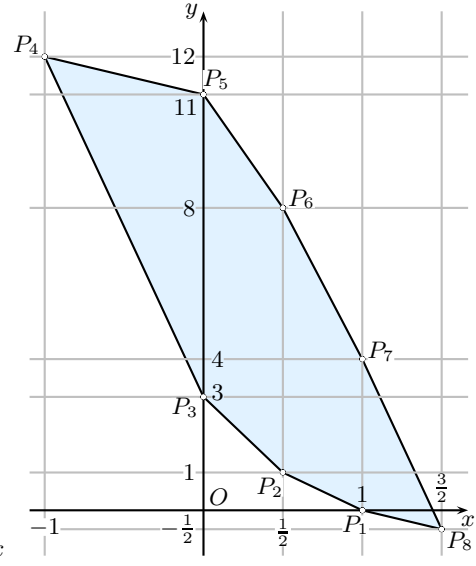


Figura 14.

$A_1A_2: y = x$	$P_1(1, 0)$	$B_1B_4: y = 11$	$P_5(0, 11)$
$A_2A_3: y = \frac{1}{2}x + 1$	$P_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$B_4B_5: y = \frac{1}{2}x + 8$	$P_6\left(\frac{1}{2}, 8\right)$
$A_3A_6: y = 3$	$P_3(0, 3)$	$B_5B_6: y = x + 4$	$P_7(1, 4)$
$A_6B_1: y = -x + 12$	$P_4(-1, 12)$	$B_6A_1: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$	$P_8\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$s_1: y = \frac{1}{4}x + \frac{23}{4}, \quad s_2: y = \frac{7}{16}x + \frac{77}{16}, \quad s_3: y = \frac{11}{46}x + \frac{267}{46}.$$

Come vediamo in questo caso la retta  $s_3$  è molto vicina alla retta  $s_1$ , mentre la retta  $s_2$  sembrerebbe un po' troppo inclinata, ma credo che a questo punto sia ora che il mio amico statistico si riprenda in mano il problema e, in virtù di questi risultati, lo analizzi con i suoi strumenti.